PROCESOS DE MARKOV

Principio de Markov:
Cuando una probabilidad condicional depende únicamente del suceso inmediatamente anterior, cumple con el Principio de Markov de Primer Orden, es decir.

$$P(X(t+1)=j \mid X(0)=K_0, X(1)=K_1, \ldots\ldots, X(t)=i) = P(X(t+1)=j \mid X(t)=i) = p_{ij}$$

Definiciones en los Procesos de Markov de Primer Orden:

Estados: Las condiciones en las cuales se encuentra un ente ó sucesos posibles.
Ensayos: Las ocurrencias repetidas de un evento que se estudia.
Probabilidad de Transición: La probabilidad de pasar de un estado actual al siguiente en un período ó tiempo, y se denota por $\boldsymbol{p_{ij}}$ (la probabilidad de pasar del estado **i** al estado **j** en una transición ó período)

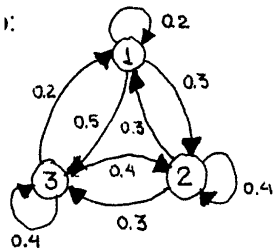
Características de los Procesos de Markov de Primer Orden:
Se pueden usar como modelo de un proceso físico ó económico que tenga las siguientes propiedades:
a) Que la probabilidad cumpla con el principio de Markov.
b) Existencia de un número finito de estados.
c) Las $\boldsymbol{p_{ij}}$ son constante con respecto al tiempo ó período.
d) Ensayos en períodos iguales.

Si un suceso depende de otro además del inmediatamente anterior, este es un proceso de Markov de mayor orden. Por ejemplo, Un proceso de segundo orden describe un proceso en el cual el suceso depende de los dos sucesos anteriores.
Los procesos de Markov también se les llama **Cadenas de Markov**.

Notaciones que utilizaremos:

$\boldsymbol{p_{ij}}$ **=** probabilidad de transición en un período.
$\mathbf{P = [p_{ij}]_{nxn}}$ matriz de transición formada por los valores de $\boldsymbol{p_{ij}}$, donde cada fila representa el estado inicial donde se parte y las columna el estado al que se ira en un período.
$p_{ij}^{(k)} = P(X(k)=j \mid X(0)=i)$ representa la probabilidad de ir del estado **i** al estado **j** en ***k*** períodos.
$\mathbf{P^{(k)}=[\ p_{ij}^{(k)}\ ]_{nxn}}$ la matriz de transición de ***k*** períodos.
$\mathbf{S_i(t)}$ **=** probabilidad de encontrarse en el estado **i** en el período ***t***.
$\mathbf{S(t) =(S_1(t)\ ,\ S_2(t)\ ,\ .\ .\ .\ .\ ,\ S_n(t))}$ vector de probabilidad de estado en el período ***t***. Para n estados.

Los sucesos que cumplan con un proceso de Markov, se pueden representar por medio de un esquema donde los nodos indique los estados y arcos dirigidos de nodo a nodo con un número que representa la probabilidad de transición de ir de un estado a otro, ó por medio de una matriz de transición.
Ejemplo:



$$\left.\begin{array}{ccc} 2 & 0.3 & 0.5 \\ 3 & 0.4 & 0.3 \\ 2 & 0.4 & 0.4 \end{array}\right]$$

Para calcular:

$p_{11}^{(2)} = P(X(2)=1 | X(0)=1) = p_{11}.p_{11} + p_{12}.p_{21} + p_{13}.p_{31}$
$= 0{,}2.0{,}2+0{,}3.0{,}3+0{,}5.0{,}2 = 0{,}23$

$p_{12}^{(2)} = P(X(2)=2 | X(0)=1) = p_{11}.p_{12} + p_{12}.p_{22} + p_{13}.p_{32}$
$= 0{,}2.0{,}3+0{,}3.0{,}4+0{,}5.0{,}4 = 0{,}38$

$p_{13}^{(2)} = P(X(2)=3 | X(0)=1) = p_{11}.p_{13} + p_{12}.p_{23} + p_{13}.p_{33}$
$= 0{,}2.0{,}5+0{,}3.0{,}3+0{,}5.0{,}4 = 0{,}39$

luego $p_{11}^{(2)} + p_{12}^{(2)} + p_{13}^{(2)}$ **=1**

Otra forma es usando el vector de probabilidades y la matriz de transición, es decir:
S(0) = (1, 0, 0**)** **S(1) = S(0).P = (**0,2; 0,3; 0,5**)**

S(2) =S(1).P =(0,23; 0,38; 0,39**)**

Cadenas de Markov Ergódicas ó cadenas irreductibles.

Describen matemáticamente un proceso en el cual es posible avanzar desde un estado hasta cualquier otro estado. No es necesario que esto sea posible en un paso.

Una cadena ergódica es regular: Si para alguna potencia de la matriz de transición tiene únicamente elementos positivos de probabilidad (diferente de cero)

Ejemplo 1:

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.7 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \qquad P^2 = \begin{bmatrix} 0.40 & 0.25 & 0.35 \\ 0.15 & 0.43 & 0.42 \\ 0.12 & 0.24 & 0.64 \end{bmatrix}$$

luego es regular (y por lo tanto ergódica)

Ejemplo 2:

$$P = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0.7 \\ 0.6 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \quad P^2 = \begin{bmatrix} 0.52 & 0 & 0.48 & 0 \\ 0 & 0.44 & 0 & 0.56 \\ 0.48 & 0 & 0.52 & 0 \\ 0 & 0.40 & 0 & 0.60 \end{bmatrix} \quad P^4 = \begin{bmatrix} p & 0 & 1-p & 0 \\ 0 & q & 0 & 1-q \\ r & 0 & 1-r & 0 \\ 0 & h & 0 & 1-h \end{bmatrix}$$

Esta matriz repite continuamente este patrón para todas las potencias de ***P***; por consiguiente no es regular ni tampoco ergódica.

Propiedades de las Cadenas de Markov.

1.- Las probabilidades de estados deben ser igual a uno, es decir.
$S_1(t)+S_2(t)+ \ldots ,+S_n(t) = 1$ para **n** estados.

2.- Para cada fila de la matriz **P** se cumple: $\boldsymbol{p_{i1}+p_{i2}+\ldots\ldots +p_{in} = 1}$ para todo $\boldsymbol{i = 1, 2, ..., n}$

3.- Las transiciones de un período al siguiente se obtienen de la siguiente ecuación: **$S(t) = S(t-1).P$** por lo tanto **$S(t) = S(0).P^t$**

4.- Si **$S(t+1) = S(t)$** para **t** $\geq$ K, Entonces se dice que el sistema se estabiliza ó que los estados son estacionarios ó estables. Esto implica que **S = S.P** , es decir. El vector de estado estacionario sigue siendo igual después de la transición **t**.

Ejemplo para calcular el vector de equilibrio o de estado estacionario.

Sea :

$$P = \begin{bmatrix} 3/5 & 2/5 \\ 4/5 & 1/5 \end{bmatrix} \quad P^2 = \begin{bmatrix} 17/25 & 8/25 \\ 16/25 & 9/25 \end{bmatrix} \quad P^3 = \begin{bmatrix} 83/125 & 42/125 \\ 84/125 & 41/125 \end{bmatrix} \quad P^4 = \begin{bmatrix} 417/625 & 208/625 \\ 416/625 & 209/625 \end{bmatrix}$$

$$P^5 = \begin{bmatrix} 2083/3125 & 1042/3125 \\ 2084/3125 & 1041/3125 \end{bmatrix} \quad P^6 = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix} \quad P^7 = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

El proceso se estabiliza en el período 6

Otra forma:

Se calcula el siguiente sistema $\begin{cases} S = S.P \\ \sum S_i = 1 \end{cases}$ en este caso $\begin{cases} S = 0{,}6S_1 + 0{,}8S_2 \\ S_2 = 0{,}4S_1 + 0{,}2S_2 \\ S_1 + S_2 = 1 \end{cases}$ y

queda $\begin{cases} 0{,}4S_1 - 0{,}8S_2 = 0 \\ S_1 + S_2 = 1 \end{cases}$

cuya solución es: $S_1 = 2/3$ y $S_2 = 1/3$

Observación: Las ecuaciones que se obtienen del desarrollo de $S = S.P$ Siempre hay una ecuación que es combinación lineal de las demás ecuaciones, por lo tanto se omite para que el sistema quede con **n** ecuaciones y **n** variables.

Estados Absorbentes:

Es aquel estado que tiene una probabilidad de ser abandonado igual a cero, es decir. Una vez en él es imposible dejarlo. Esto quiere decir:

Si $\boldsymbol{i}$ es un estado absorbente si se cumple que $\boldsymbol{p_{ij} = 0}$ si $\boldsymbol{i \neq j}$ y $\boldsymbol{p_{ii} = 1}$.

Una cadena de Markov es Absorbente:

Si se cumple:

- **a)** Tiene por lo menos un estado Absorbente.
- **b)** Es posible ir de cada estado no absorbente hasta por lo menos un estado absorbente. No es necesario efectuar esta transición en un paso; ni es necesario tener la posibilidad de alcanzar cada estado absorbente a partir de cualquier estado no absorbente.

Análisis de las cadenas de Markov Absorbentes.

A partir del análisis de estas cadenas, es posible determinar los siguientes datos:

1. El número esperado de pasos antes de que el proceso sea absorbido.
2. El número esperado de veces que el proceso está en cualquier estado dado no absorbente.
3. La probabilidad de absorción por cualquier estado absorbente dado.

El primer paso del análisis es construir una submatriz **H** de **P** formada de estados no absorbentes a estados no absorbentes. Luego **H** da las probabilidades de ir desde cualquier estado no absorbente hasta otro estado no absorbente en un paso exactamente, $\mathbf{H}^2$ da las probabilidades de ir desde cualquier estado no absorbente hasta otro estado no absorbente en dos pasos exactamente. $\mathbf{H}^3$ da información similar para tres pasos, etc. Por lo tanto, $\mathbf{H}^n$ da esta misma información para **n** pasos.

Para hallar el número esperado de pasos antes que el proceso sea absorbido, consiste en calcular el número esperado de veces que el proceso puede estar en cada estado no absorbente y sumarlos. Esto totalizaría el número de pasos antes de que el proceso fuera absorbido y por consiguiente el número esperado de pasos hacia la absorción. Luego:

$\mathbf{I+H+H^2+H^3+ \ldots = (I-H)^{-1} = Q}$ Por consiguiente **Q** representa el número esperado de períodos que el sistema estará en cada estado no absorbente antes de la absorción, por lo tanto la suma de cada fila de **Q** representa el promedio de períodos que transcurren antes de ir a un estado absorbente.

Para hallar la probabilidad de absorción por cualquier estado absorbente dado, se emplea una lógica similar en el análisis. Se construye una submatriz **G** de **P** formada de estados no absorbente a estados absorbentes y representa la probabilidad de ir de un estado no absorbente a un estado absorbente en un paso exactamente, **H.G** representa la probabilidad de ir de un estado no absorbente a un estado absorbente en dos pasos exactamente y así sucesivamente. Por lo tanto $\mathbf{G+H.G+H^2.G+.....=(I+H+H^2+H^3+ .....).G=(I-H)^{-1}.G=Q.G=R}$, Y esta matriz representa la proporción ó probabilidad en que un estado no absorbente pasa a un estado absorbente.

Número de pasos para alcanzar por primera vez un estado determinado en cadenas no absorbentes (Tiempo de la primera transición)

Si definimos a $\mathbf{f_{ij}}$ como el promedio de períodos que transcurre antes de cambiar de un estado **i** al estado **j** por primera vez. Se tiene que $f_{ij}=1+\sum_{k\neq j} p_{ik}.f_{kj}$ y además $f_{ii}=\frac{1}{S_i}$

Otro método: Consiste en transformar en estado absorbente el estado al cual queremos ir por primera vez, por ejemplo si **j** es el estado que queremos llegar por primera vez, para ello la matriz **P** se modifica de manera que el estado **j** aparezca como estado absorbente y obtener la matriz **Q** de esta transformación y por lo tanto $f_{iA}=\sum q_{iA}$ donde A representa el estado absorbente.

Valor Económico Esperado en un Proceso ó cadena de Markov.

En un proceso de Markov estar en cada estado genera un costo ó beneficio, por lo tanto el valor económico esperado se define:

$E(C)=\sum \frac{c_i}{f_{ii}}=\sum c_i.S_i$,es decir, el valor económico por la probabilidad del sistema estabilizado.